天學闡微

天學闡微卷之五

王家弼學

句股釋例三

弧三角名義

弧三角之法以測渾圓渾圓上之弧度皆與天相應其弧度有極大之圈乃腰圍之一線如黄赤道子午規地平規皆是也兩弧度相交而成角角有正有斜斜角又有鋭鈍共三種而角兩旁皆弧線與直線角異兩弧線又皆半周必復相交作角而等與直線半徑異三弧度相交則成三角形三角形有三角三邊共六件以先有之三件求餘三件與平三角同所不

同者平三角形之三角并之皆一百八十度弧三角不然其三角最小者比一百八十度必盈但不得滿五百四十度平三角之邊小僅咫尺大則千百萬里弧三角邊必在半周以下不得滿一百八十度合三邊不得滿三百六十度平三角有兩角即知餘角弧三角非算不知平三角有一正角餘二角必銳弧三角則否有三正角兩正角者其餘角有鈍有銳或兩銳或兩鈍或一銳一鈍不等平三角有一鈍角餘二角必銳弧三角則否其餘角或銳或正或銳甚有三鈍角者平三邊以不同邊而同角為相似形同邊又

同角為相等形弧三角則但有相等之形而無相似之形以同角者必同邊也平三角但可以三邊求角不可以三角求邊弧三角則可以三角求邊平三角用八綫惟用於角弧三角用八線並用於邊平三角以角之八線與邊相比弧三角是以角之八線與邊之八線相比平三角有正角即為句股若正弧三角形實非句股而以其八線輳成句股平三角以角求邊是用弧線求直線也以邊求角是用直線求弧線也然角以八線為用仍是以直線求直線也句股法也弧三角以邊求角以角求邊是以弧線求弧線也

而角與邊並用八線仍是以直線求直線也亦句股法也蓋惟直線可成句股所不同者平三角所成句股形即在平面而弧三角所成句股不在弧面而在其內外測量家有點有線有面有體弧三角備有之其所測之角即點也弧三角之邊即線也弧三角之形即面也弧三角之所麗即渾體也渾圓內點線面體與弧三角相應如渾球中剖則成平圓即面也以球面之各角依視法移于平圓面即渾圓內相應之點也又以弧與角之八線移至平面成句股是渾圓內相應之線也又如弧三角之二邊各引長之成大圈

各依大圜以剖渾圓即各成平面圖是亦渾圓內相應之面也二平圓相割成瓜瓣三平圓相割成錐依八線橫剖之即成塹堵是渾圓體內相應之分體也雖不可以目視而可以算得也

弧三角八線

弧三角非圖不明然圖弧線於平面必用視法變渾為平如圖甲丙乙丁半渾圓以甲戊乙弧界之則其弧面分兩角為一鋭一鈍以視法移此弧

度于相應之平面亦一銳一鈍即分圓徑為大小二矢而戊丙正矢為戊甲丙銳角之度戊乙丙亦同戊丁大矢為戊甲丁鈍角之度戊乙丁亦同故得矢即得角又如前圖丙戊弧為甲銳角之度與丙庚等則丙戊之在平面者變為直線即為甲銳角之矢而戊己為角之餘弦戊庚為角之正弦丙辛為角之切綫己辛為角之割線皆與平面丙庚弧之八綫等丁己戊過弧為甲鈍角之度與丁乙庚過弧等則丁戊在平面者變為鈍角之大矢而戊己餘弦戊庚正弦丙辛切綫己辛割綫並與銳角同平面鈍角之八綫與

外角同用弧三角亦然

弧三角角邉各類

凡三角內有一正角謂之正弧三角形三角內並無正角謂之斜弧三角形

三弧三角形之角有三正角者有二正角一鋭角者有二正角一鈍角者三種不須用算又有一正角兩鋭角者內分二種一種兩鋭角同度一種兩鋭角不同度有一正角兩鈍角者內分二種一種兩鈍角同度一種兩鈍角不同度有一正角一鋭角一鈍角者內分二種一種鋭鈍兩角合之成半周一種合鋭鈍

兩角不能成半周計正弧之角九種而用算者六也

正弧三角形之邊有三邊並足者九十度有二邊足

一邊小者在象限以下為小有二邊足一邊大者過象限以上為大

三種可不用算有三邊並小者內分二種一種二邊

等一種三邊不等有二邊大而一小者內分三種一

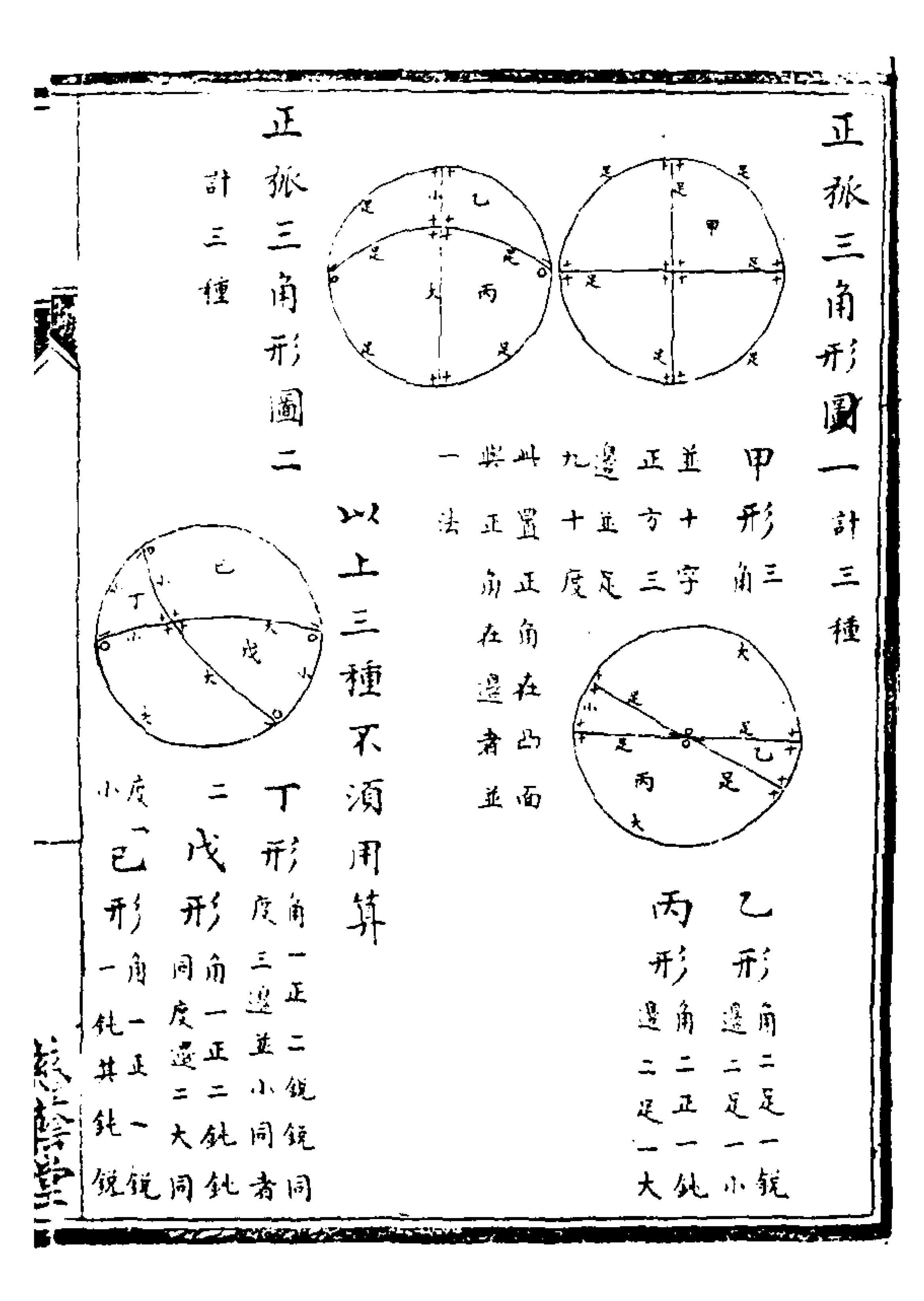
種二大邊等一種二大邊不等一種小邊為一大邊

减半周之餘計正弧之邊八種而用算者五也二邊

俱小則餘邊必不能大故無二小一大之形二邊俱

大則餘邊亦不能大故無三邊並大之形一邊若足

則餘邊亦有一足故無一邊足之形



正弧三角形圖一 計三種
甲
乙
丙
甲形 角三
並十字正方三邊並足九十度
此置正角在四面與正角在邊者並一法
乙形 角二足一銳 邊二足一小
丙形 角二正一鈍 邊二足一大
正弧三角形圖二 計三種
以上三種不須用算
丁
戊
己
丁形 角一正二銳銳同 度三邊並小同者
二
戊形 角一正二鈍鈍同 同度邊二大同
小度
己形 角一正一銳 一鈍共鈍銳

兩角成半圜邊二大一小內一大邊與小邊成半圜

小正角在邊與前圖正角在面者同法後角辛壬形倣此

以上正弧形三種有同度之邊與角謂之二等邊形內有己形雖無同等之邊角而有共為半周之邊角度雖不同而所用之正弦則同即同度也凡邊等者角亦等後倣此

正弧三角形圖三

計三種

庚形角一正二鈍三邊並小並同丁形而無等度

辛形角一正二鈍邊二大一小並同戊形而無等度

壬形

角一正一銳一鈍邊二大一小並同乙形兩大小二邊不能成半周角亦然

以上正弧形三種邊角與丁戊己三種無異但與同度之邊

斜弧三角形之角有三角並銳者內分三種一種有二角相等一種三角不相等一種三角俱等有二角銳而一鈍者內分四種一種二銳角相等一種二銳角不相等一種鈍角為一銳角減半周之餘一種二銳角相等而又並為鈍角減半周之餘有二角鈍而一銳者內分四種一種二鈍角相等一種二鈍角不相等一種銳角為一鈍角減半周之餘一種二鈍角

相等而又並為鋭角減半周之餘有三角並鈍者內分三種一種有二角相等一種三角不相等一種三角相等計斜弧之角十有四種斜弧三角形之邊有一邊足二邊小者內分二種一種二小邊相等一種二小邊不等有一邊足二邊大者內分二種一種二大邊等一種二大邊不等有一邊足一邊小一邊大者內分二種一種大小二邊合之成半周一種合二邊不能成半周有三邊並小者內分三種一種三邊不等一種二邊等一種三邊俱等有二邊大而一小者內分四種一種二大邊等一種二大邊不等一種

小邊為一大邊減半周之餘一種二大邊等而又並為小邊減半周之餘有二邊小而一大者內分四種一種二小邊等一種二小邊不等一種大邊為一小邊減半周之餘一種二小邊等而又並為大邊減半周之餘有三邊並大者內分三種一種三邊不等一種二邊等一種三邊俱等計斜弧之邊二十種

斜弧三角形圖一 計四種

乾形 三角並鈍又皆同度三邊並大又皆同度

坤形 角一鈍二銳銳同度其銳角為銳角減半周之餘邊一大二小小同度其大邊為小邊減半周之餘

艮形 三角並銳又皆同度三邊並小又皆同度

巽形 角一銳二鈍鈍同度又皆為銳角減半周之餘邊一小二大大同度又皆為小邊減半周之餘

以上斜弧形四種並三角三邊同度謂之三等邊形內有二等邊者其一邊為等邊減半周之餘與三等邊同法以同用正弦故

斜弧三角形圖二 計十二種

子形 二銳角同度一鈍二小邊同度一足

丑形 三鈍角內同度者二二大邊同度一足

寅形 二銳角一鈍內一銳角為鈍角減半周之餘邊一足一大一小小邊為大邊減半周之餘

卯形 二銳角同度一鈍三邊並小同者二

辰形 三角並鈍內同度者二二大邊同度一小

巳形 二銳角一鈍內一銳角為鈍角減半周之餘二大邊一小內一大邊為小邊減半周之餘

午形 二銳角同度一鈍二小邊同度一大

未形 三角並鈍同度者二三邊並大同度者二

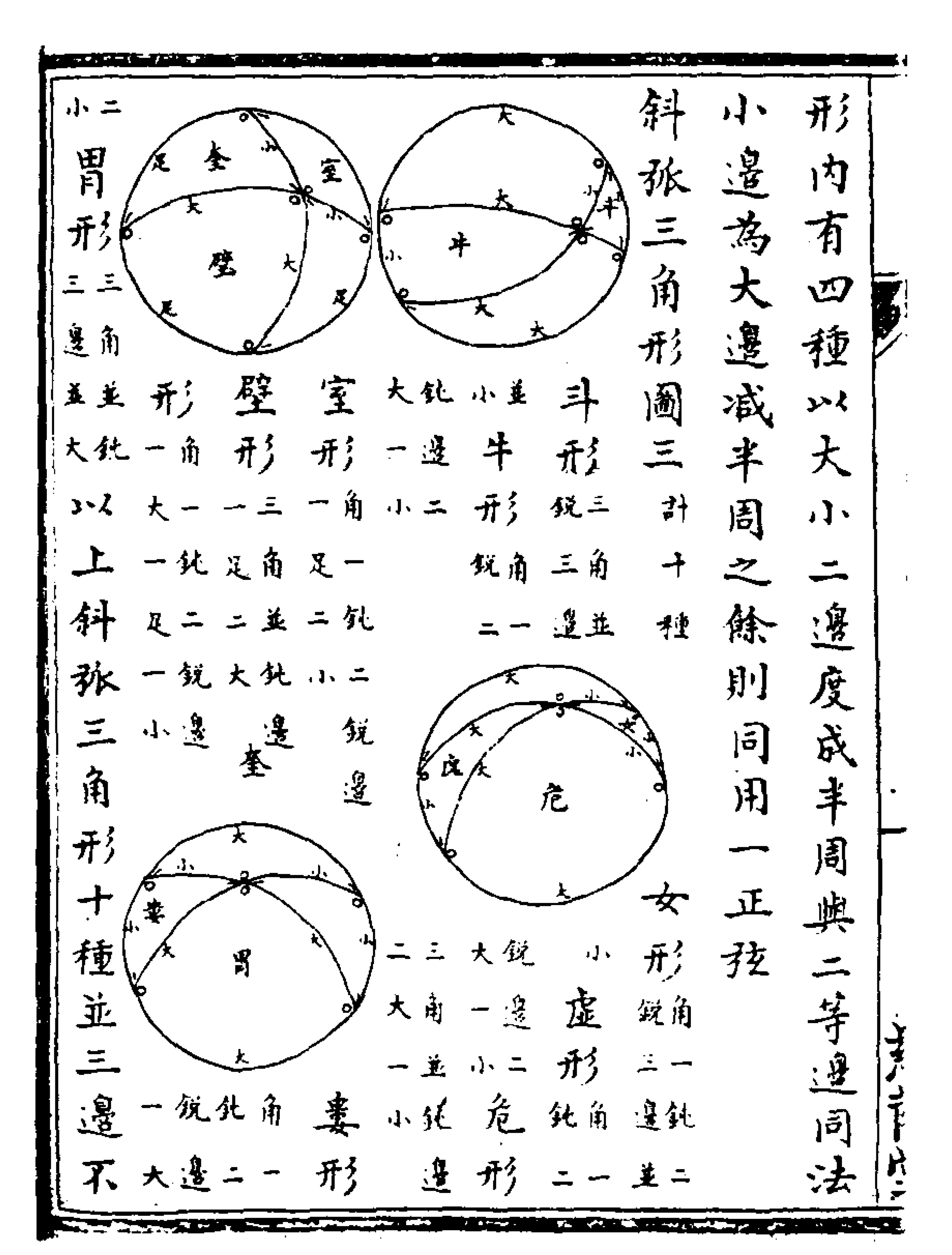
申形 二銳角一鈍內一銳角為鈍角減半周之餘二小邊一大內一小邊為大邊減半周之餘

酉形 三角並銳同度者二三邊並小同度者一

戌形 二鈍角同度一銳二大邊同度一小

亥形 二鈍角一銳內一鈍角為銳角減半周之餘二大邊一小內一大邊為小邊減半周之餘

以上斜弧三角形十二種並二等邊



形內有四種以大小二邊度成半周與二等邊同法小邊為大邊減半周之餘則同用一正弦

斜弧三角形圖三 計十種

斗形 三角並銳三邊並小

牛形 角一銳二鈍邊二大一小

女形 角一鈍二銳三邊並小

虛形 角一鈍二銳邊二大一小

危形 三角並鈍二大一小邊

室形 角一鈍二銳邊一足二小

壁形 三角並鈍一足二大邊

奎形 角一鈍二銳邊一大一足一小

婁形 角一鈍二銳邊一大二小

胃形 三角並鈍三邊並大

以上斜弧三角形十種並三邊不

等用算只四種

正弧三角形以八綫成句股

乙丁寅為赤道乙丙癸為黃道乙與寅為春秋分癸為夏至午癸丁辰為極至交圈午與辰為南北極午丙甲為過極經圈

丙乙為黃道距二分之度

甲乙為赤道距二分之度即同升度丙甲為黃甲距緯成

丙乙甲三角弧形甲為正角乙春秋分角與渾圓心

卯角相應

癸丁弧為黃赤大距即乙角之弧亦為卯角之弧癸巳為乙角正弦卯己其餘弦戊丁為乙角切線戊卯其割線卯癸及卯丁皆半徑成癸巳卯及戊丁卯兩句股形

丙辛為丙甲距度正弦丙壬為丙乙黃道正弦作辛壬線與丁卯平行成丙辛壬句股形

子甲為丙甲距度切線甲丑為甲乙赤道正弦作子丑線與丙壬平行成子甲丑句股形

酉乙為丙乙黃道切線未乙為甲乙赤道切線作酉未線與子甲平行成酉未乙句股形

前二句股形在癸丁大距孤内外癸己卯用正餘
弦在孤内戊丁卯用割切線出孤外後三句股形
在丙乙甲三角内外丙辛壬在丙角用兩正弦在
渾圜内子甲丑在甲角兼用正弦切線半在内半
在外酉未乙用兩切線在渾圜外

用法

假如有丙乙黄道距春分之度求其距緯丙甲法為
半徑癸卯與乙角之正弦癸己若丙乙黄道之正弦
丙壬與丙甲距緯之正弦丙辛也

丙乙黄道距春分四十五度求距緯丙甲

一 辛 癸卯 一〇〇〇〇〇〇〇

二 辛 癸巳 三九八四三七八

三 辛 丙壬 七〇七一〇六八

四 辛 丙辛 二八一七三八〇

檢表得丙甲一十六度二十一分五十七秒

若先有丙甲距度而求丙乙黃道距春分之度則反用之為乙角之正弦癸巳與半徑癸卯若丙甲距緯之正弦丙辛與丙乙黃道之正弦丙壬也

丙甲距緯一十六度二十一分五十七秒求丙乙黃道

一率　癸巳　三九八四三七八

二率　癸卯　一〇〇〇〇〇〇

三率　丙辛　二八一七三八〇

四率　丙壬　七〇七一〇六八

檢表得丙乙四十五度

假如有甲乙赤道同升度求距緯丙甲法為半徑卯丁與乙角切線丁戊若甲乙赤道正弦甲丑與丙甲距緯切線子甲也

甲乙赤道同升四十二度三十一分三十五秒求距緯丙甲

一辛卯丁　一〇〇〇〇〇〇〇

二辛丁戊　四三四四六六六

三辛甲丑　六七五九二九六

四辛子甲　二九三六六八二

檢表得丙甲一十六度二十一分五十七秒

若先有丙甲距緯而求甲乙赤道則反用之為乙角之切線戊丁與半徑丁卯若丙甲距緯之切線子甲與甲乙赤道之正弦甲丑也

丙甲距緯一十六度二十一分五十七秒求甲乙

赤道

一率　戊丁　四三四四六六六

二率　丁卯　一〇〇〇〇〇〇

三率　子甲　二九三六六八二

四率　甲丑　六七五九二九六

檢表得甲乙四十二度三十一分三十五秒

假如有丙乙黃道距二分之度徑求甲乙赤道同升度法為半徑卯癸與乙角之餘弦卯己若丙乙黃道之切線酉乙與甲乙赤道之切線未乙也

丙乙黃道距二分四十五度求甲乙赤道

一率　卯癸　一〇〇〇〇〇〇

二　辛　卯己　九二七一七六〇

三　辛　酉乙　一〇〇〇〇〇〇

四　辛　未乙　九一七一七六〇

檢表得甲乙四十二度三十一分三十五秒

若先有甲乙赤道同升度而求黃道丙乙距二分之度則反用之為半徑丁卯與乙角之割線戊卯若甲乙赤道之切線未乙與丙乙黃道之切線酉乙也

甲乙赤道四十二度三十一分三十五秒求丙乙

黃道

一　辛　丁卯　一〇〇〇〇〇〇

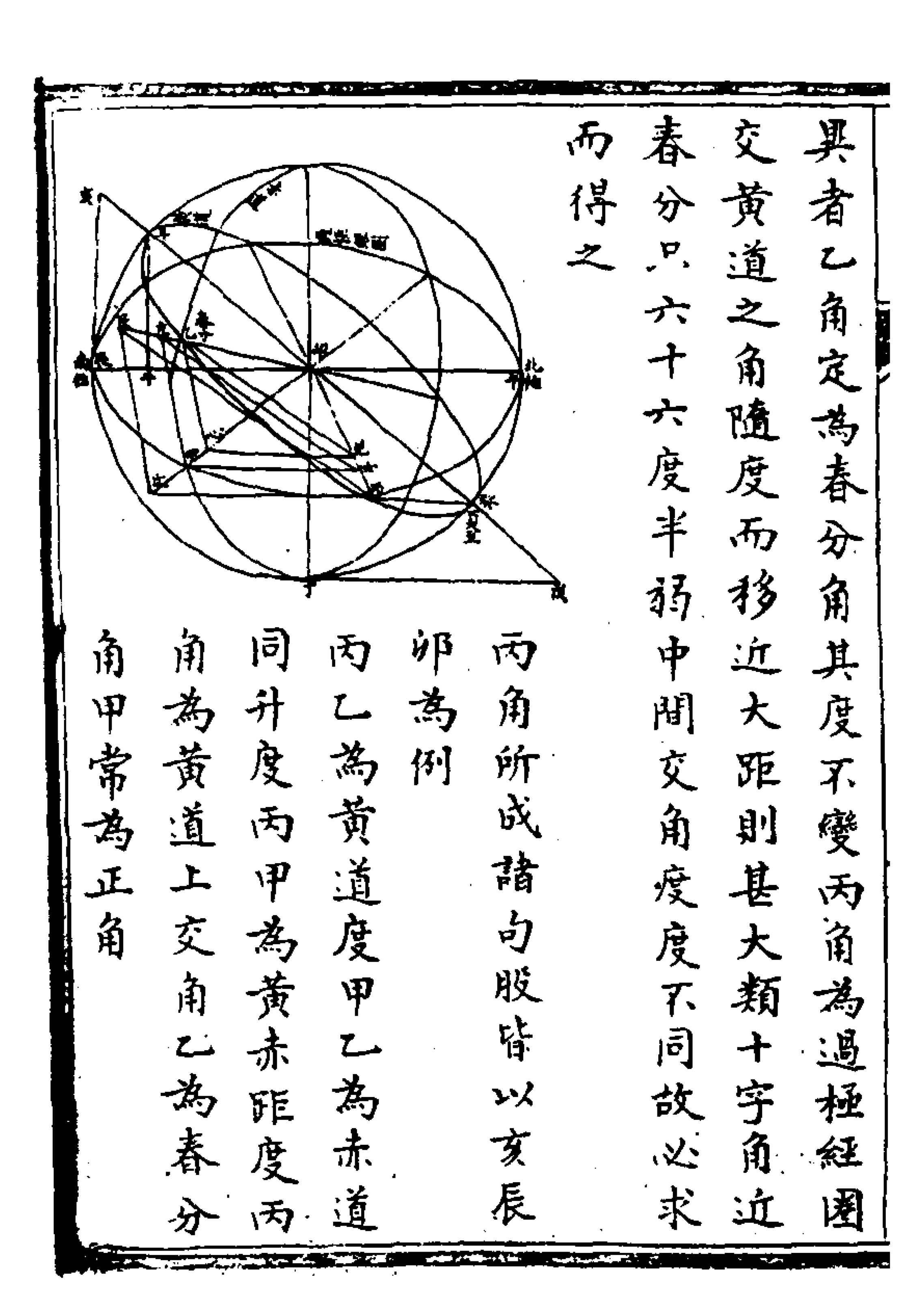
二辛　戊卯　一〇九〇三〇三二
三辛　未乙　九一七一七六〇
四辛　酉乙　一〇〇〇〇〇〇

檢表得丙乙四十五度

正弧三角形求餘角法

凡弧三角有三邊三角先得三件可知餘件與平三角同理前論正弧形以黄赤道為例而但詳乙角者因春分角有一定之度人所易知故先詳之或疑求乙角之法不可施於丙角不知求乙角之法一一皆同丙角更之而用丙角求餘邊亦如其用乙角也所

異者乙角定為春分角其度不變丙角為過極經圈
交黃道之角隨度而移近大距則甚大類十字角近
春分只六十六度半弱中間交角度度不同故必求
而得之



丙角所成諸句股皆以亥辰
卯為例
丙乙為黃道度甲乙為赤道
同升度丙甲為黃赤距度丙
角為黃道上交角乙為春分
角甲常為正角

丙角第一層句股亢乙心形即乙角之壬丙辛也在乙角兩正弦交於丙在丙角兩正弦交於乙皆弦與股之比例而同弦不同股（乙角丙角並以乙丙正弦為弦而乙角以丙甲正弦為股丙角以乙甲正弦為股皆正弦也而弦同股別）

丙角第二層句股女甲亢形即乙角之子甲丑也一角丙角並以一正弦一切線交於甲為句與股之例而所用相反（乙角於乙甲用正弦於丙甲用切線丙角則於乙甲用切線於丙甲用正弦皆乙甲丙甲弧之正弦切線而所用迥別）

丙角第三層句股艮丙氐形即乙角之酉乙未也在乙角以兩切線聯於乙在丙角以兩切線聯於丙皆

弦與句之比例而同弦不同句乙丙兩角並以乙丙切線為弦而乙角以乙甲切線為句丙角以丙甲切線為句皆切線也而弦同句別

假如有乙丙黃道度有乙甲赤道同升度而求丙交角則為乙丙之正弦與乙甲之正弦若半徑與丙角之正弦也

乙丙黃道四十五度乙甲赤道四十二度三十一分三十五秒求丙交角

一率　乙丙正弦　七〇七一〇六八

二率　乙甲正弦　六七五九二九六

三率　半徑全數　一〇〇〇〇〇〇〇

四率　丙角正弦　九五五九〇八七

檢表得丙角七十二度五十五分二十一秒

假如有丙甲距度及乙甲同升度而求丙交角則為丙甲之正弦與乙甲之切線若半徑與丙角之切線也

丙甲距緯一十六度二十一分五十七秒乙甲赤道四十二度三十一分三十五秒求丙交角

一率　丙甲正弦　二八一七三八〇

二率　乙甲切線　九一七一七六〇

三率　半徑全數　一〇〇〇〇〇〇〇

四辛　丙角切線　三二五五〇九八五

檢表得丙角七十二度五十五分二十一秒

假如有丙甲距度及乙丙黃道度而交丙交角則為乙丙之切線與丙甲之切線若半徑與丙角之餘弦也

丙甲距緯一十六度二十一分五十七秒乙丙黃道四十五度求丙交角

一辛　乙丙切線　一〇〇〇〇〇〇〇

二辛　丙甲切線　二九三六六八二

三辛　半徑全數　一〇〇〇〇〇〇〇

四率　丙角餘弦　二九三六六八二

檢表得丙角七十二度五十五分二十一秒

又如有丙交角有乙丙黃道度而求乙甲同升度則為半徑與丙角之正弦若乙丙之正弦與乙甲之正弦

丙角七十二度五十五分二十一秒乙丙黃道四十五度求乙甲赤道以丙角正弦九五五九〇八七乘乙丙正弦七〇七一〇六八退七位得乙甲正弦六七五九二九六檢表得四十二度三十一分三十五秒

或先有乙甲同升度而求乙丙黃道度則以前率更之為丙角之正弦與半徑若乙甲之正弦與乙丙之正弦

乙甲赤道四十二度三十一分三十五秒丙角七十二度五十五分二十一秒求乙丙黃道以丙角正弦九五五九〇八七除乙甲正弦六七五九二九六陞七位得乙丙正弦七〇七一〇六八檢表得四十五度

又如有丙交角有乙甲同升度而求丙甲距度則為丙角之切線與半徑若乙甲之切線與丙甲之正弦

丙角七十二度五十五分二十一秒乙甲赤道四十二度三十一分三十五秒求丙甲距度以丙角切線三二五五〇九八五除乙甲切線九一七一七六〇陞七位得丙甲正弦二八一七三八〇檢表得一十六度二十一分五十七秒

或先有丙甲距度而求乙甲同升度則以前率更之

為半徑與丙角切線若丙甲正弦與乙甲切線

丙甲距緯一十六度二十一分五十七秒丙角七十二度五十五分二十一秒求乙甲赤道以丙角切線三二五五〇九八五乘丙甲正弦二八一七

三八○退七位得乙甲切線九一七一七六○檢表得四十二度三十一分三十五秒

又如有丙交角有乙丙黃道度求丙甲距度則為半徑與丙角餘弦若乙丙切線與丙甲切線

丙角七十二度五十五分二十乙秒乙丙黃道四十五度求丙甲距度以丙角餘弦二九三六六八二乘乙丙切線一○○○○○○○退七位得丙甲切線二九三六六八二檢表得一十六度二十一分五十七秒

或先有丙甲距度而求乙丙黃道則以前率更之為

丙

丙角餘弦與半徑若丙甲切線與乙丙切線

丙甲距緯一十六度二十一分五十七秒丙角七十二度五十五分二十一秒求乙丙黃道以丙角餘弦二九三六六八二除丙甲切線二九三六六八二陞七位得乙丙切線一〇〇〇〇〇〇〇檢表得四十五度

弧角同比例解

正弧三角形以一角對一邊則各角正弦與對邊之正弦皆為同比例如圖乙甲丙弧三角形甲為正角其正弦即半徑全數

法為甲角之正弦與乙角之正弦若乙丙之正弦與丙甲之正弦更之則乙角之正弦與對邊丙甲之正弦若甲角之正弦與對邊乙丙之正弦也又丙角之正弦與對邊乙甲之正弦亦若甲角之正弦與對邊乙丙之正弦也合之則乙角之正弦與對邊丙甲之正弦亦若丙角之正弦與對邊乙甲之正弦也用半徑與乙丙為比例者取其數也言甲角之正弦與乙丙為比例者所以明其理也

專用正弦求各角各邊

有甲角乙角乙丙邊求丙甲邊

一甲角正弦　半徑九十度　一〇〇〇〇〇〇〇

二乙角正弦　黃赤大距二十三度二十九分　三九八四三七八

三乙丙正弦　黃經四十五度　七〇七一〇六八

四丙甲正弦　距緯檢表得一十六度二五一七　二八一七三八〇

有甲角乙角丙甲邊求乙丙邊

一乙角　黃赤大距二十三度二九　三九八四三七八

二丙甲　距緯一十六度二一上七　二八一七三八〇

三甲角　九十度同半徑過極經圈正交赤道之角　一〇〇〇〇〇〇〇

四乙丙　檢表得黃經四十五度　七〇七一〇六八

有甲角丙角乙甲邊求乙丙邊

乙丙角　過極經圈并交黃道之角　七十二度五五二一　九五五九〇八

二乙甲　赤經四十二度三一三五　六七五九二九[illegible]

三甲角　九十度　過極經圈正交赤道之角　一〇〇〇〇〇〇

四乙丙　黃經餘四十五度　七〇七一〇六八

有乙角丙角丙甲邊求乙甲邊

一乙角　大距二十三度二九　三九八四三七八

二丙甲　距緯一十六度二一五七　二八一七三八〇

三丙角　黃交角七十二度五五二一　九五五九〇八七

四乙角　赤經四十二度三一三五　六七五九二九六

有乙丙邊丙甲邊甲角求乙角

一乙丙正弦　七〇七一〇六八
二丙甲正弦　二八一七三八〇
三甲角正弦　一〇〇〇〇〇〇〇
四乙角正弦　三九八四三七八

有乙丙邊乙甲邊甲角求丙角

一乙丙　七〇七一〇六八
二乙甲　六七五九二九六
三甲角　一〇〇〇〇〇〇〇
四丙角　九五五九〇八七

有乙甲邊丙甲邊乙角求丙角

一丙甲　二八一七三八〇

二乙甲　六七五九二九六

三乙角　三九八四三七八

四丙角　九五五九〇八七

有乙丙邊丙甲邊乙角求甲角

一丙甲　二八一七三八〇

二乙丙　七〇七一〇六八

三乙角　三九八四三七八

四甲角　一〇〇〇〇〇〇〇

用法

凡弧三角形但有一角及其對角之一弧則其餘有一角者可以知對角之弧而有一弧者亦可以知對弧之角皆以其正弦用三率比例求之假如乙丙甲三角形先有甲角及相對之乙丙弧則其餘但有丙角可以知乙甲弧但有乙角可以知丙甲弧此為角求弧也若有乙甲弧亦可求丙角有甲丙弧亦可求乙角此為弧求角也

斜弧三角形作垂弧

正弧形有正角如平三角之有句股形也斜弧形無正角如平三角之有鋭鈍形也平三角鋭鈍二形並

以虛線成句股故斜弧形亦以垂弧成正角也正弧形以正弦等線立算句股法也斜弧形仍以正角立算亦句股法也垂弧之法有三其一作垂弧於形內則分本形為兩正角形其二作垂弧於形外則補成正角形其三作垂弧於次形凡三角俱銳垂弧在形內一鈍二銳或在形內或在形外自鈍角作垂弧則在形內自銳角作垂弧則在形外兩鈍一銳或三角俱鈍則用次形其所作垂弧在次形之內之外次形無鈍角垂弧在其內有鈍角垂弧則其外若破鈍角亦可在形內

第一法垂弧在形內成兩正角

設甲乙丙形有丙銳角有角旁相聯之乙丙甲丙二邊求對邊及餘兩角

法於乙角（不知之角）作垂弧（乙丁）至甲丙邊分甲丙邊為兩即分本形為兩形兩皆正角一乙丁丙形有丁正角丙角乙丙邊為兩角一邊可求丁丙邊乙丁邊及丁乙丙分角（乙分角）次乙丁甲形有丁正角甲丁邊乙丁邊為一角兩邊可求乙甲邊甲角及乙丁甲分角末以兩乙角併之成乙角或如上圖于甲角端作垂弧至乙丙邊分乙丙為兩亦同

設甲乙丙形有丙鋭角有角旁相連之丙乙邊及與角相對之乙甲邊求餘兩角一邊

法於不知之乙角作乙丁垂弧分兩正角形一乙丙丁形有丁正角丙角乙丙邊可求乙丁分線及所分丁丙邊及丁乙丙分角次乙甲丁形有丁正角乙丁邊乙甲邊可求甲角及丁乙甲分角丁甲邊末以兩分角并之成乙角以兩分邊并之成甲丙邊

設甲乙丙形有乙丙二角有乙丙邊求甲角及餘邊

法於乙角作垂弧分兩形一乙丙丁形有丁正

角丙角乙丙邊可求乙丁邊丁丙邊丁乙丙分角次乙丁甲形有乙丁邊丁正角丁乙甲分角可求乙甲邊甲角甲丁邊末以甲丁并丁丙得甲丙邊或於丙角作垂線亦同若角一鈍一銳△△即破銳角作垂線其法並同

設甲乙丙形有丙甲二角乙甲邊求乙角餘邊

法於乙角作垂弧分兩形一乙丁甲形有丁正角甲角乙甲邊可求甲丁邊乙丁邊丁乙甲分角次丁乙丙形有丁正角乙丁邊丙角可求乙丙邊丁丙邊丁乙丙分角末并甲丁丁丙成甲丙邊

并兩分角成乙角

設乙甲丙形有三邊兩內有乙甲乙丙二邊相同求三角

法作乙角作垂弧至不同之甲丙一邊分兩正角形其形必相等甲丙線必兩平分可求丙角乙分角倍之成乙角兩甲角即同丙角

第二法垂弧在形外補成正角

設甲乙丙形有丙銳角有夾角之兩邊乙丙甲丙求乙甲邊及餘角

法自乙角作垂弧乙丁於形外引丙甲邊至丁補成正角形二先算丙乙丁半虛半實形有

乙丙邊丙角丁正角可求丙乙丁角半虛半實乙丁邊形外垂弧丁丙邊丙甲引長邊次甲乙丁虛形有丁正角乙丁邊甲丁邊可求乙甲邊甲角及甲乙丁虛角末以甲角減半周得原設甲角以甲乙丁虛角減丙乙丁角得原設丙乙甲角

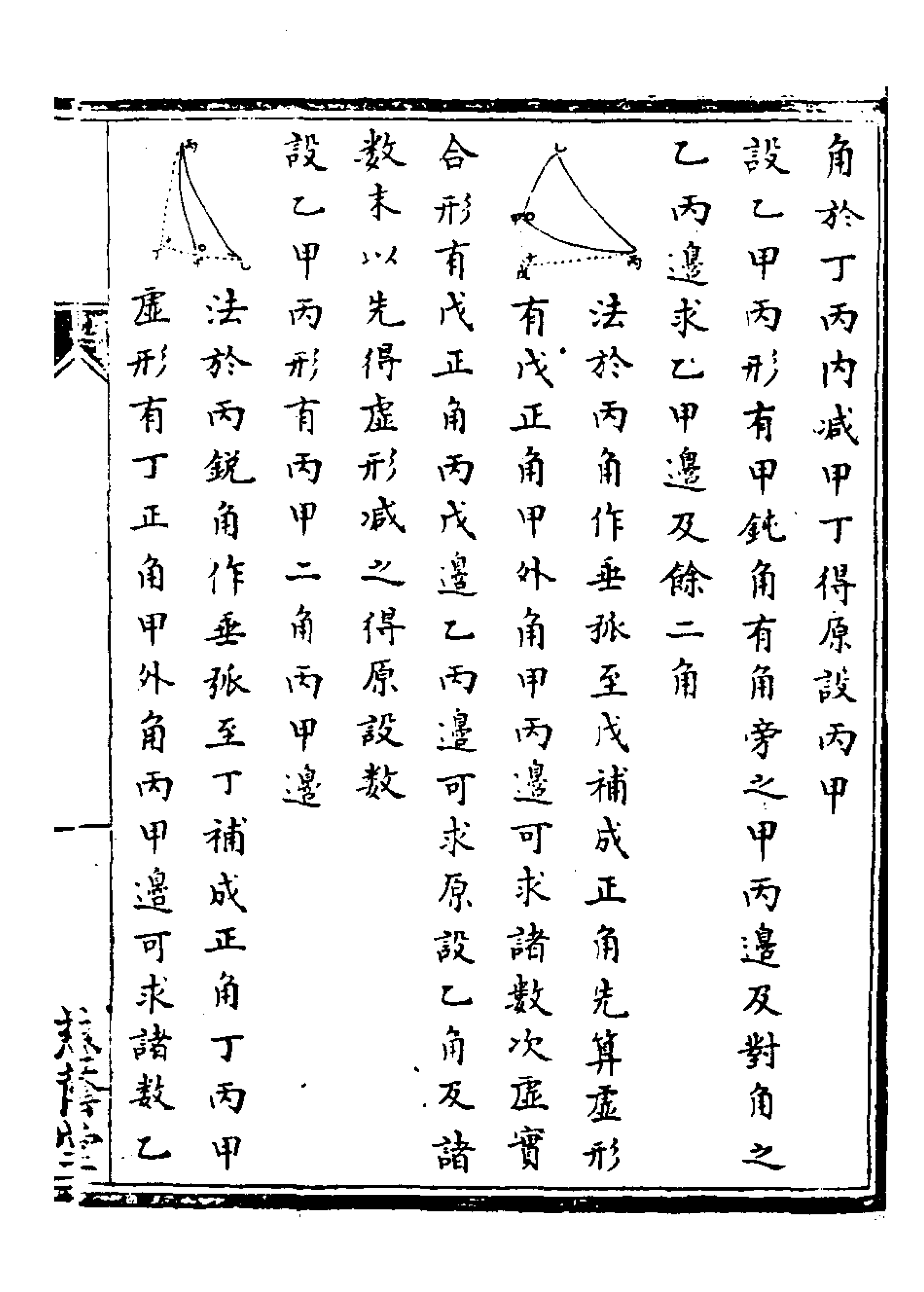
設乙甲丙形有甲鈍角有角旁之丙甲乙甲二邊求乙丙邊及餘角

法於乙角作垂弧乙丁引丙甲至丁補成正角先算乙丁甲虛形有丁正角甲外角乙甲邊可求甲丁邊乙丁邊丁乙甲虛角次丁乙丙形有乙

丁邊丁丙邊丁正角可求乙丙邊丙角丙乙丁角末於丙乙丁內減丁乙甲虛角得原設乙角或從丙作垂弧至戊引乙甲邊至戊補成正角亦同

設乙甲丙形有丙銳角有角旁之乙丙邊有對角之乙甲邊求丙甲邊及餘二角

法從乙角作垂弧至丁成正角先算丙乙丁形有丁正角丙角乙丙邊可求乙丁邊丁丙邊丙乙丁角次丁乙甲虛形有丁正角乙丁乙甲二邊可求乙甲丁角甲乙丁角甲丁邊末以所得虛形甲角減半周得原設甲鈍角於丙乙丁內減虛乙角得原設乙



角於丁丙内減甲丁得原設丙甲

設乙甲丙形有甲鈍角有角旁之甲丙邊及對角之乙丙邊求乙甲邊及餘二角

法於丙角作垂弧至戊補成正角先算虛形有戊正角甲外角甲丙邊可求諸數次虛實合形有戊正角丙戊邊乙丙邊可求原設乙角及諸數末以先得虛形減之得原設數

設乙甲丙形有丙甲二角丙甲邊

法於丙銳角作垂弧至丁補成正角丁丙甲虛形有丁正角甲外角丙甲邊可求諸數乙

丙丁虛實合形有丁正角丙丁邊丙角可求原設乙丙邊乙角及乙甲邊

設乙甲丙形有乙甲二角丙甲邊

法於丙銳角作垂弧至戊補成正角甲戊丙虛形有戊正角丙甲邊甲外角可求諸數乙丙戊形有戊正角乙角丙戊邊可求丙角乙丙邊乙甲邊

設乙甲丙形有乙銳角甲鈍角丙乙邊

法於丙銳角作垂弧至戊補成正角乙丙戊形有戊正角乙角乙丙邊可求諸數甲丙戊虛有戊正角甲外角甲戊邊可求諸數

第三垂弧又法用次形

設乙甲丙形有乙丙二角乙丙邊求餘二邊及甲角

法引丙甲至己引乙甲至戊各滿半周作戊己邊與乙丙等而己與戊並乙丙之外角成甲戊己次形乃作垂弧己丁於形內分為兩形以己丁戊分形求丁戊以己丁甲形求甲丁合之成甲戊以減半周即乙甲以己丁甲分形求己甲以減半周即丙甲以己丁甲分形求甲交角

設乙甲丙形有丙甲二角乙甲邊求乙角及餘邊

法引甲乙丙乙俱滿半周會于己成丙甲己次形作己丁垂形于次形內分次形為兩求到分形兩己角合之為次形己角與乙對角等求到分形甲丁及丁丙并之即甲丙求到次形己丙以減半周得乙丙

設乙甲丙形有乙丙乙甲二邊有乙角

法用甲乙戊次形作甲丁垂弧分為兩形以乙甲丁分形求到丁乙及甲分角又以甲戊丁形求到甲戊以減半周為丙甲又得甲分角并先所得成甲角即甲外角又得戊角即丙對

角或丙為鈍角則於次形戊角作垂弧法同上條

設乙甲丙形有丙角甲丙邊乙甲邊

法用甲己戊次形作垂弧甲丁以甲丁戊分形求丁戊及甲分角又以甲丁己形求得丁己以并丁戊成己戊即丙乙又得甲分角以并先得分角即甲交角又得己角即乙外角

設乙甲丙形有三邊內有二邊乙甲丙甲相同皆為過弧

法引相同之二邊各滿半周成戊甲己次形作甲丁垂弧兩形相等任以甲丁戊分形求到戊角以減半周得

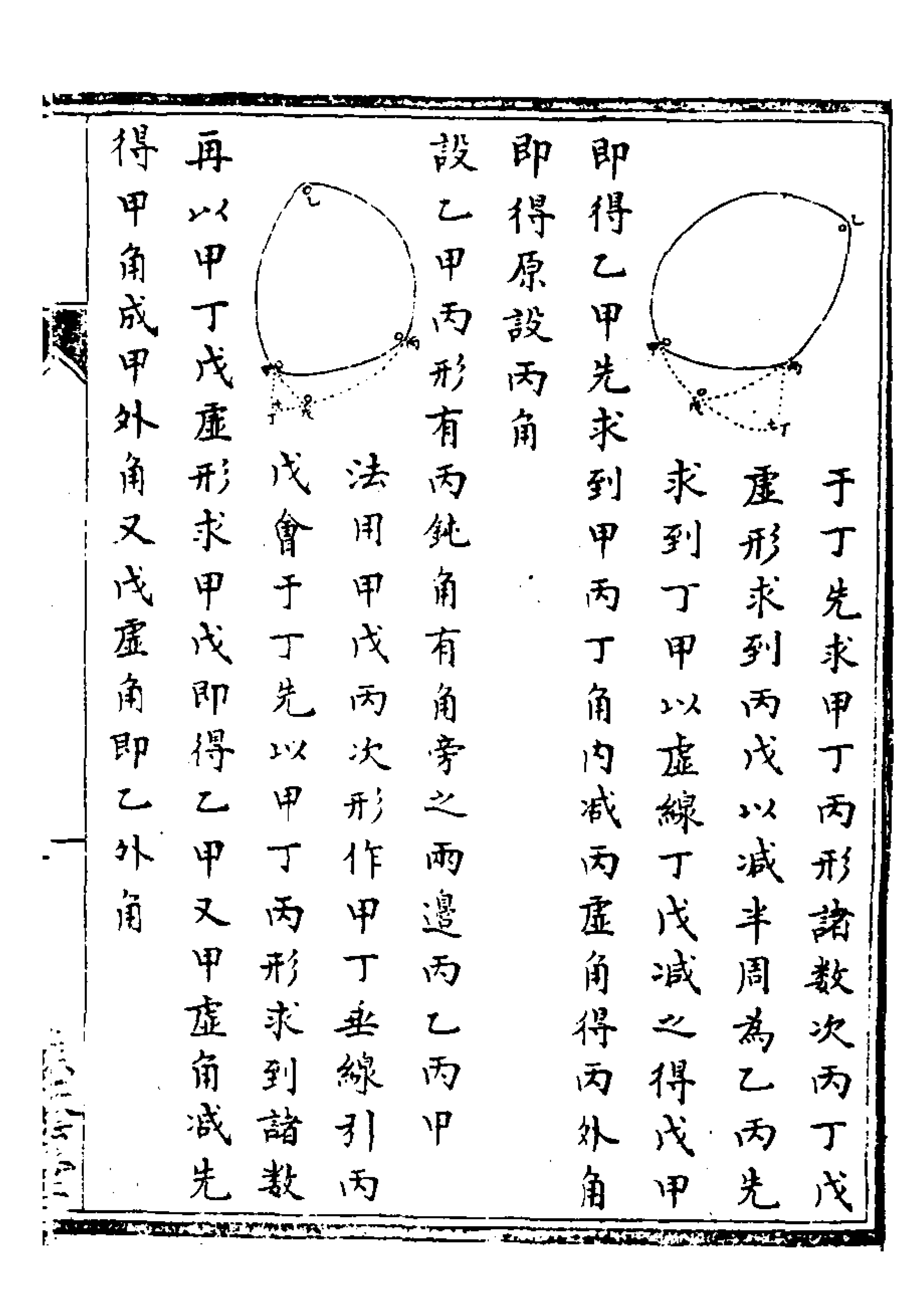
乙角亦即丙角求到甲半角倍之成甲角

設乙甲丙形有丙甲二鈍角甲丙邊

法引乙丙乙甲滿半周會于戊成甲戊丙次形自甲作垂弧與丙戊引長弧會于丁先求丙甲丁形諸數次求甲戊丁得甲戊以減半周為乙甲又以丁戊減先得丁丙得丙戊以減半周為乙丙又求得戊虛角減半周為戊角即乙對角或自丙角作垂弧亦同

設乙甲丙形有乙甲二鈍角甲丙邊

法引設邊成丙戊角次形作丙丁垂弧引次形邊會



于丁先求甲丁丙形諸數次丙丁戊虛形求到丙戊以減半周為乙丙先求到丁甲以虛線丁戊減之得戊甲即得乙甲先求到甲丙丁角內減丙虛角得丙外角即得原設丙角

設乙甲丙形有丙鈍角有角旁之兩邊丙乙丙甲

法用甲戊丙次形作甲丁垂線引丙戊會于丁先以甲丁丙形求到諸數再以甲丁戊虛形求甲戊即得乙甲又甲虛角減先得甲角成甲外角又戊虛角即乙外角

設乙甲丙形有甲鈍角乙丙邊丙甲邊

法用丙戊甲次形自丙作垂弧會甲戊線于丁求到甲戊即得乙甲求戊角即乙角以丙虛角減先得丙角即丙外角

正斜弧三角並用次形

正弧三角斜弧三角並有次形法而其用各有二其一易大形為小形則大邊成小邊鈍角成銳角其一易角為弧則三角可以求邊亦二邊可求一邊

正弧三角形易大為小用次形

如圖戊己甲乙半渾圓以戊丙甲己丙乙兩半周線分為弧三角形四一戊丙乙二己丙戊三己丙甲並大四乙丙甲為最小令可盡易為小形

一戊丙乙形易為乙甲丙形戊丙減半周餘丙甲又戊乙減半周餘乙甲而乙丙為同用之弧則三邊之正弦同也乙丙甲角為戊丙乙外角甲乙丙角為戊乙丙外角戊角又同甲角則三角之正弦同也故算甲丙乙即得戊丙乙

二己丙戊形易為乙甲丙形乙甲己及甲己戊並半

周內各減己甲則乙甲同己戊丙乙丙于己丙及甲丙于戊丙丙皆半周之餘又甲戊並正角丙為交角而乙角又為己角之外角故算乙丙甲得己丙戊三己丙甲形易為乙丙甲形乙甲為己甲減半周之餘乙丙為丙己減半周之餘而同用甲丙又次形丙角為原形之外角乙角同己角甲同為正角故算乙丙甲得己丙甲

凡正弧三角內有大邊及鈍角者皆以次形立算但於得數後以次形之邊與角減半周即得元形之大邊及鈍角斜弧同其元形內原有小邊及銳角與次

形同者徑用得數命之不必復減半周

正弧三角形弧角相易用次形

一乙甲丙形易為丁丙庚次形

解曰丁如北極戊己壬甲如赤道圈己庚乙如黃道半周辛丁壬如極至交圈壬如夏至辛如冬至戊丁甲如所設過極經圈乙如春分己如秋分並以庚壬大距為其度丙如所設其星黃道度丙乙如黃道距春分度其餘丙庚即黃道距夏至為次形之一邊丙甲如黃赤距度其餘丙丁即丙在黃道距北極度為次形又一邊庚丁如夏至

黃道距北極而為乙角餘度是角易為邊也壬庚為乙角度其餘庚丁是為次形之三邊又丙交角如黃道上交角庚正角如黃道夏至甲乙如赤道同升度其餘壬甲如赤道距夏至即丁角之弧是邊易為角也則次形又有三角

假如有丙交角乙春分角而求諸數是三角求邊也乙丙兩角並甲正角而三法為丙角之正弦與乙角之餘弦若半徑與丙甲之餘弦得丙甲邊可求餘邊

一丙角[illegible]黃道上斜交角七十二度五五二一正弦〇九五五九〇八七

丙角黃道上交角七十二度五五二一正弦

二　乙角（春分角）二十三度二九　餘弦　〇九一七一七六〇　在次形　丁庚（夏至黃道距極）六十六度三二　正弦

三　半徑（九十度赤道至極甲角）　全數正弦　一〇〇〇〇〇〇〇　半徑（黃道夏至九十度庚角）　全數正弦

四　甲丙（黃赤距緯）二十六度二一五七　餘弦　〇九五九四八七七　丁丙（丙在黃道距緯）七十三度三八〇三　正弦

右以三角求邊也若三邊求角反此用之

若先有乙丙邊乙甲邊而求甲丙邊則為乙甲餘弦（即次形丁角正弦）與乙丙餘弦（即庚丙正弦）若半徑（甲角即次形庚角）與甲丙餘弦（即丁丙正弦）

一　乙甲　四十二度三一三五　餘弦　〇七三六九五二九　在次形　丁角　一百三十三度三一三五　正弦

二　乙丙　四十五度　餘弦　〇七〇七一〇六八　庚丙　四十五度　正弦

三　半徑　全數　一〇〇〇〇〇〇〇　庚角　九十度　正弦

四甲丙一十六度二一五七餘弦四〇九五九八七七　丁丙七十三度三八〇三正弦

或先有乙丙邊甲丙邊而求乙甲邊則為甲丙餘弦即丁丙正弦與乙丙餘弦即庚丙正弦若半徑甲庚角即與乙甲餘弦即丁角正弦

或先有乙甲邊甲丙邊而求乙丙邊則為半徑甲角即庚角與甲丙餘弦即丁丙正弦若乙甲餘弦即丁角正弦與乙丙餘弦即庚丙正弦

右皆以兩弧求一弧而不用角也以上為乙甲丙形用次形之法本形三邊皆小一正角偕兩銳角次形亦然所以必用次形者為三角求邊之用也

二己丙甲形甲正角餘二角丙鈍己銳丙甲邊小餘二邊並大易為丁丙庚

次形

法曰截己甲於壬截己丙於庚使己壬己庚皆滿九十度作壬庚丁象限弧又引丙甲邊至丁亦滿象限而成丁丙庚次形此形有丁丙邊為丙甲之餘有庚丙邊為己丙之餘凡過弧內去象限其餘度正弦即過弧之餘弦故己丙內減己庚丙庚丙為其餘弧有庚丁邊為己角之餘乃角易為邊也庚與壬皆象限即庚壬為己角之度丙丁庚為其餘又有丙銳角為元形丙鈍角之外角有庚正角與元形甲角等壬庚既為己角之弧則壬與庚必皆正角有丁角為己甲邊之餘乃

邉易為角也

假如有甲正角已銳角丙鈍角丙求丙甲邉法為丙鈍角之正弦（即次形丙鈍角正弦蓋外角內角正弦同用也）與已角之餘弦（即次

形丁庚邉之正弦形丁丙邉之正弦）若半徑（即次形庚正角之正弦）與丙甲之餘弦（即次

既得丙甲可求已丙邉法為半徑與丙角餘弦若甲丙餘切（次形為丁丙正切）與已丙餘切（次形為庚丙正切）得數以減半周為已丙下同（凡以八線取弧角度者若係大邉鈍角皆以得數與半周相減命度

求己甲邊法為己角之餘弦（即庚丁正弦）若丙角之正弦

若己丙之餘弦（即庚丙正弦）與己甲之餘弦（即丁角正弦其弧壬甲）

右三角求邊

又如有己甲己丙兩大邊求丙甲邊法為己甲餘弦（即丁角正弦）與己丙餘弦（即庚丙正弦）若半徑與丙甲餘弦（即丁丙正弦）

或有己甲丙甲兩邊求己丙大邊法為半徑與丙甲餘弦（即丁丙正弦）若己甲餘弦（即丁角正弦）與己丙餘弦（即庚丙正弦）得數減半周為己丙下同

或有丙甲己丙二邊求己甲大邊法為丙甲餘弦與

半徑若己丙餘弦與己甲餘弦（即上法之反理）

右二邊求一邊以上己丙甲形用次形之法本形有兩大邊一鈍角次形則邊小角銳而且以本形之邊易為次形之角本形之角易為次形之邊後二形並同

三己丙戊形（戊正己鈍丙銳己丙戊丙並大）易為丁丙庚次形

法曰以象限截己丙於庚其餘庚丙截戊丙於丁其餘丁丙為次形之二邊作丁庚弧其度為己角之餘（己鈍角與外銳角同以壬庚之度取正弦其餘丁庚為己外角之餘亦即為己鈍角之餘）角易邊也次形又為

元形之截形同用丙角又庚正角與戊角等而丁角即己戊邊之餘度（試引己戊至辛成象限則戊辛等壬甲皆丁角之度而又爲己戊之）餘邊易角也

假如有丙銳角己鈍角借戊正角求戊丙邊法爲丙角正弦與己角餘弦（即庚正弦）若半徑與戊丙餘弦（即丁丙正弦）得數減半周爲戊丙下同

既得戊丙可求己丙法爲半徑與丙角餘弦若戊丙餘切（即丁丙正切）與己丙餘切（即庚丙正切）

求己戊邊法爲戊丙餘弦（即丁丙正弦）與半徑若己丙餘弦（即庚丙正弦）與己戊餘弦（即丁角正弦）

以上三角求邊

四乙丙戊形（戊正乙丙並鈍戊乙戊丙並大乙丙小）易為丁丙庚次形

法曰引乙丙邊至庚滿象限得次形丙庚邊（即乙丙之餘）于丙戊截戊丁象限得次形丁丙邊（為戊丙之餘）丙丁即為戊乙弧之極（戊正角至丁九十度故知之）從丁作弧至庚成次形庚丁邊為乙角之餘是角易為邊也又庚正角與戊等丙為外角丁角為乙戊邊之餘是邊易為角也

假如三角求邊以丙角正弦為一率乙角餘弦為二率半徑為三率求得戊丙餘弦為四率以得數減半

周為戊丙餘並同前

以上三角求邊

正弧形弧角相易又法用又次形

甲乙丙形依前法引乙丙邊甲乙邊各滿象限至庚至己作庚己弧引長之至丁亦引甲丙會于丁亦各滿象限成丁丙庚次形又引丙庚至辛引丙丁至戊亦滿象限作辛戊弧引之至壬亦引庚丁會于壬則辛壬庚壬亦皆象限成丁戊壬又次形此形與甲乙丙形相當乙丙邊易為壬角乙庚及丙辛皆象限內

減同用之丙庚則辛庚即乙丙而辛庚即壬角之弧也乙邊甲易為丁角乙甲之餘度己甲即丁交角之弧也是次形之兩角即元形之兩邊也乙角易為丁壬邊丁己及庚壬俱象限內減同用之庚丁則丁壬即己庚而為元形乙角之弧也丙角易為戊壬邊丙交角之弧辛戊其餘為次形戊壬也是次形之兩邊即元形之兩角而次形戊丁邊即元形丙甲次形戊角即元形甲角也若原形有三角則次形有戊直角有戊壬丁壬二邊可求乙甲邊法為乙角之正弦即丁壬正弦與半徑若丙角之餘弦即戊壬正弦與乙甲之餘弦

即丁角正弦求乙丙邊法為乙角之切線即丁壬切線與丙角之餘切即戊壬正切若半徑與丙乙之餘弦即壬角餘弦既得兩邊可求餘邊

以上又次形三角求邊用次形止一弧一角相易

今用又次形則兩弧並易為角兩角並易為弧

斜弧三角易大為小用次形

一甲乙丙二等邊形三角皆鈍

先引乙丙邊成全圓又引甲丙甲乙兩邊出圓周外會于丁又引兩邊各至圓周如戊如己成乙丁丙及戊己甲兩小形皆

相似而等即各與元形相當而大形易為小形次形甲戊甲己二邊為元形邊減半周之餘則同一正弦次形己戊二角為元形之外角亦同一正弦而次形甲角原與元形為交角戊己邊又等乙丙邊故算小形與大形同法惟於得數後以減半周即得大邊及鈍角之度其交角甲及相等之戊己邊只得數便是并不用減

二甲乙丙三邊不等形角一鈍二銳

引乙丙作圓又引餘二邊至圓周戊己得相當次形己甲戊算戊甲得甲丙算己甲得

甲乙算己戊得乙丙其角亦一鈍二鋭算戊鈍角得丙鋭角算己鋭角得乙鈍角而甲交角一算得之又戊甲乙形角一鈍二鋭引戊乙作圜又引乙甲至圜周己成次形己甲戊與元形相當算己甲得甲乙算己戊得戊乙又同用戊甲邊算甲鋭角得甲鈍角算戊鈍角得戊鋭角算己角即乙角

又甲己丙形三角俱鈍引丙己作圜又引丙甲至戊成相當次形己甲戊算甲戊得甲丙算己戊得己丙又同用己甲又丙鈍角即戊鈍角甲己兩鋭角並元形之外角

斜弧三角形弧角互易用次形

一乙甲丙形三角俱鋭易為丑癸寅形一鈍二鋭

引乙甲作圜次引乙丙至酉引甲丙至未並半周次以甲為心作丁辛癸寅弧乙為心作戊丑癸壬弧丙為心作丑子午寅弧三弧交處别成一丑癸寅形與元形相當而元形之角盡易為邊邊盡易為角甲角之弧丁辛與次形癸寅邊等乙角之弧己壬與次形丑癸邊等

丙外角之張午申與次形寅丑邊等是元形有三角即次形有三邊也又甲乙邊之度易為癸外角甲丙邊易為寅角乙丙邊易為丑角是元形有三邊即次形有三角也既以三角為次形之三邊則三角可以求邊再用三邊求角法求得次形三角即反為元形之三邊

又丙未酉形及丙未乙形丙酉甲形並可易為甲乙丙則又皆以癸丑寅為又次形

二未丙酉形三角俱鈍易為丑癸寅形一鈍二銳

引酉未張作圓又引兩邊至圜周甲乙乃以未為心作

丁辛癸寅辰弧以酉為心作戊丑癸壬己弧以丙為心作庚子丑寅午申弧亦引丙甲出圜外會于申三弧相交成丑癸寅形與元形相當而角盡易為弧弧盡易為角未外角之弧丁辛成次形癸寅弧酉外角之弧壬己成次形丑癸弧丙外角之弧申午成次形寅丑弧是三角盡易為邊也酉未邊成癸外角未丙邊減半周其餘甲丙成寅角酉丙邊減半周其餘乙丙成丑角是三

邊盡易為角也三角減半周得次形三邊并得次形三角減半周得原設三邊

若所設為乙未丙形則未角易為次形癸寅邊乙外角為丑癸邊丙角為丑寅邊若所設為甲酉丙形則酉角易為丑癸邊甲外角為寅癸邊丙角為丑寅邊

三甲乙丙形一鈍兩銳易為丑癸寅形

引甲乙邊全圈引餘二邊各滿半周又以甲為心作丁壬癸丑辰半周以乙為心作戊庚辛癸

寅弧以丙為心作巳午子丑寅卯弧三弧線相交成丑癸寅次形易甲角為次形丑癸邊乙外角為次形癸寅邊丙角為次形丑寅邊則角盡為邊又甲乙邊為癸角乙丙邊成寅角甲丙邊為丑外角則邊盡為角

若所設為甲丙酉形三角俱鈍有兩大邊而則以甲外角為次形丑癸邊酉外角為癸寅邊丙外角為丑寅邊又以三邊為次形三外角若所設為丙未酉形乙未丙形並一鈍二銳而有兩大邊皆依上法可徑易為丑癸寅次形

斜弧正弧以弧角互易

一甲乙丙形甲乙邊適足九十度餘二邊一大一小角一鈍二銳易為丑癸寅正弧形

引乙丙小邊成半周作卯亥庚丑寅午以丙為心之半周作甲丑癸辛戊以乙為心之半周作乙壬癸寅弧以甲為心三弧線相交成丑癸寅次形與本形弧角相易而有正角丑寅邊即丙角癸寅邊即甲角丑癸邊即乙外角是角盡易邊也又寅角為甲丙邊所成丑角為乙丙邊所成癸正角為甲乙邊所成是邊

盡易角而有正角也

又辰戊丙形（辰戊邊象限餘並同前）易為正弧形並同前法乙丙戊形（乙戊邊足一象限餘並小）易為正角形則丑寅度即丙外角丑癸度即乙角寅癸度即戊角是角為邊也又寅角生于丙戊丑角生于乙丙癸正角生于乙戊是邊為角而有正角也辰甲丙形易為正角形（辰甲象弧餘二大邊三角並鈍）則丑寅邊為丙外角丑癸邊為辰外角寅癸邊為甲外角角為邊也又寅角生于甲丙丑角生于辰丙而癸正角生于辰甲是邊為角而有正角也

右本形有象限弧即次形有正角而斜弧變正弧

丙乙甲形丙正角餘兩鋭角相等邊三小相等者二易為己癸壬次形一角鈍二鋭鋭相等以甲為心作寅己丑半周則甲角之度子寅弧成次形己壬邊以乙為心作卯己午半周則乙角之度卯辰弧成次形己癸邊此所成二邊相等以丙為心作亥癸壬未半周則丙角之度即為次形癸壬象限邊平分次形以己壬酉形求壬角得原設甲丙邊乙丙邊求半己角倍之成己角以減半周得原設乙甲邊

若設丙戊丁形丙正角兩鈍角同度二大邊同度一邊小易為己癸壬次形與上同法惟丁戊用外角若設甲丙戊形丙正角餘一銳一鈍而銳角鈍角合成半周邊二大一小而小邊與一大邊合成半周易為己癸壬次形亦同上法惟甲用外角戊用本角而同度所得次形之邊亦同度其轉求本形也用次形之壬角得甲丙以減半周即得丙戊或乙丙丁形亦同

右本形有正角次形無正角而有象限弧得次形之象限弧即得本形之正角或三角形無相同之邊角而有正角其次形必有象限弧或無正角而有相同之邊角其次形亦有等邊等角準此論之

次形法補算例設角一銳二鈍邊二大一小

甲乙丙形甲角一百二十度乙角一百一十度丙角八十五度為一銳二鈍三角求邊

如法易為丑寅癸次形癸寅邊六十度當甲角丑癸邊七十度當乙角寅丑邊當丙角並以角度減半周得之

求甲乙邊即次形癸外角

二率甲角一百二十度正弦　八六六〇二五四

三率乙角一百一十度正弦　九三九六九二六

相乘

以一率半徑除之得四率八一三七九七五

用前得四率數為一率　八一三七九七五

半徑為二率　一〇〇〇〇〇〇

甲乙兩角相較十度之矢一五一九二三與丙角減半

周九十五度之大矢一〇八七一五五七相較得數

為三率　一〇七一九六三四

求得四率　一三一七三〇四七為次形

癸角大矢內減半徑得　三一七三〇四七為癸內

角一百〇八度之正弦以癸內角減半周得七十一

度三十分即甲乙邊或用省法徑以所得正弦作餘

徑得癸外角七十一度三十分即甲乙邊

求甲丙邊（即次形寅角）

甲角（一百二十度之正弦）八六六○二五四

丙角（八十五度之正弦）九九六一九四七相乘得八六二七

二七四一三四六七五以半徑一○○○○○○○、

除之得數八六二七二七四為一率

半徑一○○○○○○○為二率

甲丙兩角相較（三十五度正矢）一八○八四七九

乙外角（七十度矢）六五七九七九八相較得數四七

七一三一九為三率

求得甲丙邊半周餘度之矢五五三〇二一三為四

檢表得六十三度二十七分以減半周得甲丙邊一

百一十六度三十三分

求乙丙邊即次形丑角

丙角正弦九九六一九四九

乙角正弦九三九六九二六　相乘得數半徑除之

得數九三六一一六七為一率半徑為二率乙丙兩角

較二十五度矢九三六九二一與甲外角六十度矢五〇〇

〇〇〇〇相較得數四〇六三〇七九為三率求得

餘度矢四三四一七三三為四辛

檢表得餘度五十五度三十二分以減半周得一百二十四度二十八分為乙丙邊

此所用次形之三邊三角皆本形減半周之餘度故所得四辛為角之大小矢者皆必減半周而後可以命度若他形則不盡然必須詳審

如甲未丙形甲角六十度丙角九十五度未角一百一十度易丑寅癸次形則其角易為邊惟未角弧壬戊一百一十度其半周餘度己壬七十度易次形丑癸邊為用餘度當減半周其邊易為角惟甲丙邊一

百一十六度三十三分其餘度酉丙六十三度二十七分與辛子等成次形寅角亦用餘度當減半周其他各邊各角皆用本度非概用餘度算次形也

又如乙丙酉形乙角七〇丙角九五酉角一二用癸寅丑次形求丙酉邊以丙酉兩角正弦相乘去末七位得數為一率半徑為二率以酉外角丙角相差三十五度矢與乙角矢相較得數為三率求得正矢為四率得寅角六十三度二十七分即丙酉邊求酉乙邊以乙角酉角正弦相乘退七位為一率半徑為二率酉外角乙角相差十度之矢與丙角九十五度之

矢相較得三率求得次形癸角之大矢為四率即以癸角一百○八度三十分為酉乙邊求乙丙邊亦與前條同法因丙乙兩內角之正弦及差度並與兩外角同而酉角又同甲角也

垂弧捷法次形僂法

設亥甲丁形有甲亥邊亥丁邊亥角求甲丁邊

本法作垂弧分兩形先求甲己邊次求亥己邊分丁己邊再用丁己甲己二邊求甲丁邊今捷法不求甲己邊但求亥

己邊分丁己邊即用兩分形之兩次形以徑得甲丁如圖引甲亥邊至丙引甲丁邊至庚引甲己垂弧至乙皆滿象限又引分形邊亥己至戊引丁己至辛亦滿象限末作辛庚乙丙戊半周與亥己遇于戊與丁己遇于辛戌亥丙戊次形與甲巳亥分形相當丁庚辛次形與甲己丁分形相當而此兩次形又自相當辛丁己亥戊如黃道半周辛庚乙丙戊如赤道半周甲如北極辛如春分戊如秋分己乙如黃赤大距即夏至之緯乃二分同用之角度即戊角角之度辛亥丙及丁庚皆赤緯甲亥及甲丁皆距北極之度即赤緯之餘

法為半徑與戊角之正弦若戊亥之正弦與亥丙之正弦又半徑與辛角（即戊角）之正弦若辛丁之正弦與丁庚之正弦合之則戊亥之正弦與亥丙之正弦亦若辛丁之正弦與丁庚之正弦

一率　亥己餘弦　　　亥戊正弦　黃經

二率　亥甲餘弦　　　亥丙正弦　赤緯

三率　本形　己丁餘弦　即次形　辛丁正弦　黃經

四率　甲丁餘弦　　　庚丁正弦　赤緯

若丁為鈍角則如上圖作甲己線于形外乙庚丙戊如赤道己丁亥戊如黃道皆象弧戊角如秋分其弧

己乙如夏至距緯此兩黄經並在夏至前秋分後其理易見

一率　亥己餘弦　即亥戊正弦

二率　亥甲餘弦　即亥丙正弦

三率　己丁餘弦　即戊丁正弦

四率　甲丁餘弦　即庚丁正弦

或先有者是丁鈍角甲丁丁亥二邊則先求丁己線亦用前圖

一率　丁己餘弦　即戊丁正弦

二率　甲丁餘弦　即丁庚正弦

三率　亥己餘弦　即亥戊正弦

四率　亥甲餘弦　即亥丙正弦

假如星在甲求其黃赤經緯則亥丁如兩極之距亥角若為黃經則丁角為赤經而亥甲黃緯丁甲赤緯也若丁角為黃經則亥角為赤經而丁甲黃緯亥甲赤緯也黃經赤經皆距至度黃赤緯皆距極度也法為亥角之餘弦與亥甲之餘弦若丁角之餘弦用丁鈍角皆用外角與丁甲之餘弦又為丁角之餘弦與丁甲之餘弦若亥角之餘弦與

亥甲之餘弦反之又為丁甲之餘弦與丁角之餘弦若亥甲之餘弦與亥角之餘弦又為亥甲之餘弦與亥角之餘弦亦若丁甲之餘弦與丁角之餘弦也

又如月在甲求其黃白經緯則丁亥如黃白兩極之距亥角若為黃經則丁角為白經而亥甲黃緯丁甲白緯也若丁角為黃經則亥角為白經而丁甲黃緯亥甲白緯也又如星在甲求其赤道經緯與地平經緯則丁亥如天頂距北極亥角為赤道距至度則丁角為地平距午度而亥甲星距北極丁甲星距天頂也丁角為赤道距至度則亥角為地平距午度而丁

甲距北極亥甲距天頂也此弧三角之理所以隨處
可施也

渾圓面積

渾圓求面積法先用渾圓徑求渾圓周圓徑圓周相
乘得數為渾圓面積蓋得平圓面積之四倍假如渾
天球全徑定為二〇〇〇〇〇〇〇求得圓周六二
八三一八五三以二〇〇〇〇〇〇〇乘之得一二
五六六三七〇六〇〇〇〇〇〇〇再乘圓周八位
下之小餘〇七一七九五八六又得其零數一四三
五九一七二是球皮之穹積共為一二五六六三七

〇六一四三五九一七較之平圓面積三一四一五九二六其數為四倍也凡求平圓面積者或以周徑相乘得數而四歸之為平圓面積今求渾圓則以周徑相乘得數即為渾圓面積又求平圓面積者或以半周半徑相乘得數為面積此則得數之後增加四倍乃為渾圓面積是四歸渾面之積而得平面之積四因平面之積而得渾面之積也又試將八線表内各正弦層層積算相和折半得五七二九四三三〇用九十歸之得六三六六〇二三六是為和半徑以乘每宫緯弧九二三五九〇〇得三三三三三〇

○○再乘象限經弧一五七○七九六三得五二三五八四一○○然後用二十四乘之得穹積一二五六六三○○○○與周徑相乘之數合

地球面積

古里法在天一度在地二百五十里今里法在天一度在地二百里天度大而地度小地在天中如小圓在大圓中大圓分三百六十度小圓亦分三百六十度度有大小而無多寡其照臨之相應者如此也用周徑密率求得半徑一萬一千四百五十九里小餘一五倍之得二萬二千九百一十八里强為全徑以

全徑自乘得五二五二四以比平圓面積四一二四八又四因之得一十六萬四九九二為地球之皮面積得方萬里者十六方半今之中國葢得大地一十六分之一也

逐度求皮面積

平圓面積求逐度法以逐度之弧線與半徑相乘得數折半得逐度之面積今求渾圓其所謂一度者是從北極至南極為一度之長所謂梛葉度形也法以逐度之弧線與象限弧線相乘得數即為渾面一度之積假如渾天球徑二千萬半徑一千萬求一度面

積以全周四分之得一五七〇七九六三為象限弧線以全周三百六十分之得一七四五三二為每度之弧線兩數相乘得二七四一五四二一九八三十六為渾圓一度之面積

渾圓體積

渾圓徑二〇〇〇〇〇〇〇求得渾圓周六二八三一八五三周徑相乘得一二五六六三七〇六一四三五九一七為渾圓面積四除渾圓面積得三一四一五九二六五三五八九七九為平圓面積又以渾圓徑二〇〇〇〇〇〇〇乘平圓面積得六二八三

一八五三〇七一七九五八六四七六八六三為圓
柱積倍圓柱積為一二五六六三七〇六一四三五
九一七二九五三七二六以三除之得四一八八七
九〇二〇四七八六三九為渾圓體積蓋渾圓得圓
柱三之二也或用徑上立方求渾圓積以渾圓徑二
〇〇〇〇〇〇〇自乘得四〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇〇〇〇為平方面再自乘得八〇〇〇〇〇〇
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇為立方積以
圓率三一四一五九二六乘之得二五一三二七四
一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

○○○以六除之得四一八八七九○二○○○○
○○○為渾圓體積蓋立方體與渾圓體若六○○
與三一四奇也

渾圓立方相容

渾圓內容立方立方內又容渾圓如此迭互相容則外圓徑上冪與內圓徑上冪為三倍之比例外立方與內立方之徑冪亦然立方面上斜徑之冪為方冪之倍而此兩對角斜徑即渾圓之徑內小圓徑又在立方體內即以方徑為徑其徑之冪即立方面也故曰三倍比例也若求其徑則外徑大於內徑若一十

七有奇與一十內徑之冪百開方得一十為徑則外
徑之冪三百開方得一十七又三十五之一十一為
徑若有幾層互容皆以此比例遞加即得若求其體
積則為五倍有奇之比例若有多層亦以此比例遞
加假如內容立方積一千則外大立積五千一百九
十四有奇蓋立積一千則其徑冪一百而外大立積
之徑冪三百又以徑一十七又三十五之一十一乘
之則五千一百九十四又七之二也又捷法渾圓徑
冪一萬五千則內容立方面之斜徑冪一萬為渾圓
徑冪三之二若設渾圓徑一百其冪一萬則內容立

方面之斜徑冪六千六百六十六六六亦三之二也平方開之得八十一六四九六即內容斜方之斜內容立方面冪三千三百三十三三三為渾圓徑冪三之二即方斜之半冪平方開之得五十七七三五。是為渾圓徑一百內容立方之邊亦即渾圓內容立方立方又容小圓之徑至於立方內又容渾圓則其徑冪一千一百一十一一一為渾圓徑冪九之一為方斜面冪六之一立方面冪三之一開得平方根三十三三三不盡為內容小渾圓之徑以徑乘冪得三萬七千。三十七為徑上立方積以三一四乘以四

〇〇除得二萬九千〇八十八七九為圓柱積柱積取三之二得一萬九千三百九十二一九為小渾圓積得大渾圓二十七之一以小渾圓積二十七因之得五十二萬三千五百八十九一三為外大渾圓積盖外大渾圓徑一百其徑上立方一百萬以三一四乘四〇〇除得七十八萬五千三百九十八為圓柱積三分取二得五十二萬三千五百八十九為渾圓積內方立方面冪三千三百三十三三三其邊五十七七三五〇以邊為高乘面得一十九萬二千四百五十〇為內容立方積立方內容小渾圓以立方之邊為徑

五十七五七〇三依立圓法以三一四乘四〇〇除得一十六萬一千四百九十七為圓柱積取三之二得一十〇萬七千六百六十一為小立圓積小立圓內又容立方面冪一千一百一十一一一其徑三十三三三以徑乘冪得立方積三萬七千〇三十七以三〇乘四〇〇除得二萬九千〇八十八為圓柱積又三分取一得一萬九千三百九十二為立方內又容小渾圓積為大渾圓積二十七之一也

橢圓法解

西人刻白爾噶西尼戴進賢以橢圓言天用橢圓面

積求太陽太陰加減均數自未葉大悟不同心規與
小輪難以推算更取蛋形圖以鮮天文根本說者謂
即古人天形如雞子鳥卵之說其法舊有而至戴進
賢始得用者諸輪法自多祿畝至湯若望南懷仁月
已增至四輪猶須加減勢難更增小輪乃改從橢圓
立法其實加減又家而已既立橢圓之象則又有以
橢圓為實象者竊意橢圓又不如渾圓近理蓋物極
圓則能自動莫難之珠沒奈何之球皆其証也天與
七曜之動豈有運樞轉轂者乎極圓則能自動亦一
說也若以為橢圓試為橢圓之輪運於實處則不可

行運於虛處則必不可無樞軸若橢圓之球則只可平轉兩頭竟為無用又無斜升斜降証以天象東西有差南北度高度不變亦有可通而天為横雞子形不得為立雞子形嘗觀九章算術引張衡之言立方為質立圓為渾知渾天之名本取立圓非取於橢圓乃悟雞子之喻取黄在白中若地在天中非取橢圓形似又觀梅氏書云圖張角於平面必用視法變渾為平平置渾儀從北極下視則惟赤道為外周不變而黄道斜立即成橢形又悟最外之天仍為渾圓而七政天為橢圓亦視之若橢而非真橢也

橢圓名義

太陽之行有盈縮由於本天有高卑其說一為不同心天一為本輪而不同心天之兩心差即本輪之半徑第谷用本輪以推盈縮差其高卑又止及兩心差之半故又用均輪以消息之刻白爾以來屢加精測最高前後本輪圓失之小均輪又失之大最卑前後本輪圓失之大均輪又失之小乃設本天為橢圓以兩心差一六九〇〇〇為勾平圓半徑一千萬為弦求得股九九九八五七一小餘八四八〇一九一即橢圓之小半徑而凡橢圓之正弦角度面積與平圓

之比例皆同於橢圓之小半徑與平圓半徑之比例焉太陰五星並用橢圓之法今且即太陽天推之

橢圓形

如圖甲為地心乙丙丁戊為黃道己為不同心天之心庚辛壬癸為不同心天乙庚為本輪半徑與甲己兩心差等丑乙為均輪之卑於本天己丁為均輪之高於本天止及甲己之半與甲寅等因以寅為不同心天之心與己丑作十字線又取寅丑之度從甲截橫線於午使午甲午己皆與寅丑半徑等乃以甲己兩點各為心午為界各用一針釘之圍以絲線末以

鉛筆代午針引而旋轉即成丑午己未橢圓形寅丑寅己為橢圓大半徑寅午寅未為橢圓小半徑又將橢圓面積以甲為心均分積度為太陽平行而在最卑則角度寬為行盈在最高則角度狹為行縮角度與積度之較即平行實行之差也

求橢圓度正弦

乙丁為橢圓大半徑與平圓乙壬半徑等戊乙小半徑之小於平圓半徑者即壬戊橢圓差若逐度割之則橢圓之餘弦必與平圓之餘弦等而正弦必小於平圓然平圓正弦與橢圓正弦之比例必同於平圓半徑與橢圓小半徑之比例也如丁子弧為三十度丑乙為三十度之餘弦平圓與橢圓等子丑為平圓三十度之正弦寅丑為橢圓三十度之正弦子寅為三十度之橢圓差丁卯弧為六十度辰乙為六十度之餘弦平圓與橢圓等卯辰為平圓六十

度之正弦已辰為橢圓六十度之正弦卯已為六十度之橢圓差則子丑與寅丑之比卯辰與已辰之比皆同於壬乙與戊乙之比而子丑與子寅之比卯辰與卯已之比皆同於壬乙與壬戊之比也

求橢圓角度

設卯乙辰角為平圓六十度求橢圓之已乙辰角試以乙辰為半徑作弧則卯辰為卯乙辰角之正切已辰為已乙辰角之正切夫卯辰與已辰之比既同於壬乙與戊乙之比則卯乙辰角之正切與

己乙辰角正切之比亦必同於壬乙與戊乙之比故以壬乙一千萬為一率戊乙九九九八五七一小餘八五為二率卯乙辰角六十度之正切一七三二〇五〇八為三率求得四率一七三一八〇三四為己乙辰角之正切檢表得五十九度五十九分四十七秒即己乙辰角而卯乙己角一十三秒為撱圓差角又設己甲辰角六十度五十分三十二秒求卯甲辰角試以甲辰為半徑作弧則己辰為己甲辰角之正切卯辰為卯甲辰角之正切夫卯辰與己辰之比既同於壬乙與戊乙之比則己辰與卯辰之比必同於

戊乙與壬乙之比而已甲辰角之正切與卯甲辰角正切之比亦必同於戊乙與壬乙之比故以戊乙九九九八五七一小餘八五為一率壬乙一千萬為二率己甲辰角之正切一七九二三八九七為三率求得四率一七九二六四五七為卯甲辰角之正切檢表得六十度五十分四十五秒即卯甲辰角而卯甲己角一十三秒為橢圓差角是平圓與橢圓角度之比例亦同於大徑與小徑之比例也

求橢圓面積

凡平圓面積與橢圓面積之比例同於平圓外切正

方面積與橢圓外切長方面積之比例亦即同於橢圓大徑與小徑之比例如求橢圓六十度之面積則先設丁卯弧六十度求乙卯丁六十度之平圓面積以比之法以半周率三一四一五九二六五用三分之得一○四七一九七五五為卯丁弧線與乙卯半徑一千萬相乘折半得五二三五九八七七五○○○○○即乙卯丁分平圓六十度之面積而為平圓全積六分之一又以壬乙大半徑一千萬為一辛戊乙小半徑九九九九八五七一小餘八五為

二辛乙卯丁積為三辛求得四辛五二三五二三九九七二四〇九五即乙巳丁分撱圜六十度之面積而為撱圜全積六分之一也